PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 1996-1997.

Opción A

Modelo1 Ejercicio 1 opción A sobrantes 1996

La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f : [0,3] \rightarrow R$ definida por $f(t) = 300t(3 - t)$ donde t mide el tiempo en horas

(a)[1 punto] . Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. Cuándo es nula?

(b) [0'75 puntos] ¿Cual es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración para que la saltadora pueda batir su propia marca

(c) [0'75 puntos] Representa gráficamente la función de capacidad concentración.

Solución

a)

$f : [0,3] \rightarrow R$ definida por $f(t) = 300t(3 - t) = 900t - 300t^2$

Estudiamos la monotonía, es decir la primera derivada f '(t)

$f(t) = 900t - 300t^2$

$f'(t) = 900 - 600t$

$f'(t) = 0$, de donde $900 - 600t = 0$ y la solución es $t = 3/2$ que es el posible máximo o mínimo relativo.

Como $f'(1) = 300 > 0$, f(t) es estrictamente creciente en (0, 3/2). La concentración aumenta.

Como $f'(2) = - 300 < 0$, f(t) es estrictamente decreciente en (3/2, 0). La concentración disminuye.

Por definición $x = 3/2$ es un máximo relativo que vale $f(3/2) = 675$

Como la función es continua y derivable en el intervalo [0,3] los extremos absolutos se alcanzan en los extremos del intervalo o en los extremos relativos es decir en $t = 0$, $t = 3/2$ y $t = 3$.

El mayor valor será el máximo absoluto y el menor valor será el mínimo absoluto.

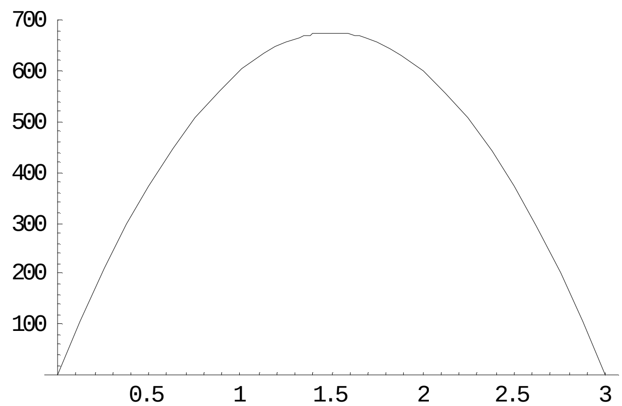
$f(0) = 0$	Concentración nula
$f(3/2) = 675$	Concentración máxima
$f(3) = 0$	Concentración nula

b)

El mejor momento es el de concentración máxima que se alcanza a las 3/2 = 1'5 horas del comienzo

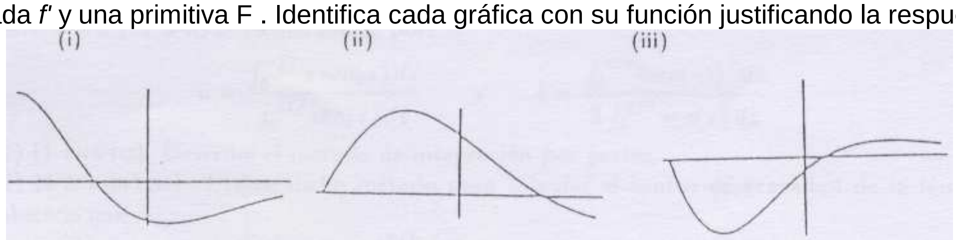
c)

La gráfica es la gráfica de una parábola, que tiene el vértice (máximo) en $t = 3/2$, y además en $t = 0$ y $t = 3$ vale 0. Luego la gráfica es



Modelo1 Ejercicio 2 opción A sobrantes 1996

[2'5 Puntos] Las gráficas (i), (ii) y (iii) corresponden, no por ese orden, a las de una función derivable f, su función derivada *f'* y una primitiva F . Identifica cada gráfica con su función justificando la respuesta.



Solución

Sea $F(x) = \int f(x)dx$ con lo cual por el teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = f(x)$ y $F''(x) = f'(x)$.

Si (i) es $F'(x) = f(x)$ tenemos lo siguiente:

F ‘(x) > 0 en (-3,-1) aproximadamente, con lo cual F(x) crece en (-3,-1)
F ‘(x) < 0 en (-1,3) aproximadamente, con lo cual F(x) decrece en (-1,3). Luego la figura (ii) es la gráfica de F(x).
F ‘(x) es decreciente en (-3,0’5) aproximadamente, con lo cual F ‘’(x) = f ‘(x) < 0 en (-3,0’5)
F ‘(x) es creciente en (0’5, 3) aproximadamente, con lo cual F ‘’(x) = f ‘(x) > 0 en (0’5,3). Con lo cual la figura (iii) es la gráfica de F’’(x) = f’(x)
Según este pequeño estudio efectivamente (i) es la gráfica de f(x), (ii) la gráfica de F(x) y (iii) la gráfica de F ‘’(x) = f ‘(x)

Modelo1 Ejercicio 3 opción A sobrantes 1996

(a) [1 punto] Si A y B son dos matrices cuadradas y del mismo orden, ¿es cierta en general la relación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .Justifica la respuesta

(b) [1'5 puntos] Calcula, según los valores de a, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Solución

a)
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ no es cierta en general porque sabemos que el producto de matrices no es conmutativo y por tanto AB no tiene que coincidir con BA, por tanto $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ en general.
b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF+1^aF(-2) \\ 3^aF+1^aF(-3) \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 8\text{-}2a \\ 0 & 0 & 0 & 12\text{-}3a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 8\text{-}2a \\ 0 & 0 & 0 & 12\text{-}3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF/2 \\ 3^aF/3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4\text{-}1a \\ 0 & 0 & 0 & 4\text{-}1a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^aF - 2^aF \end{matrix} \approx$$

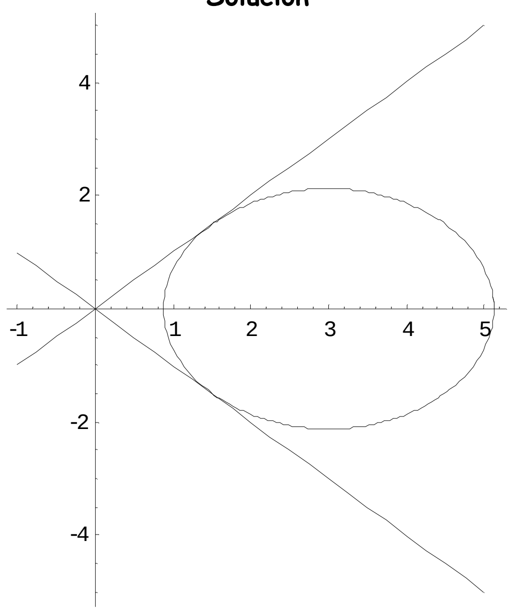
$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4\text{-}1a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si 4 –a = 0, a = 4 la matriz tiene una sola fila con elementos distintos de cero por tanto el rango es 1 (número de filas linealmente independientes, es decir número de filas con algún elemento distinto de cero).
Si a $\neq$ 4 el rango de la matriz es 2 pues hay dos filas con algún elemento distinto de cero.

Modelo1 Ejercicio 4 opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos]. Desde el origen de coordenadas pueden trazarse dos, rectas tangentes a la circunferencia que tiene su centro en el punto (3,0) y cuyo radio vale $3/\sqrt{2}$ ¿Cuales son las ecuaciones de dichas rectas tangentes?

Solución



La ecuación de la ciorcunferencia que tiene por centro (3,0) y radio $3/\sqrt{2}$ es
$(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = [3/\sqrt{2}]^2$. Operando nos queda $(x - 3)^2 + y^2 = 9/2$

La recta tangente que pasa por el punto (a,b) de la circunfernecia es $y - b = y'_{(a,b)}(x - a)$, siendo $y'_{(a,b)}$ la

derivada implícita de la ecuación de la circunferencia en en el punto (a,b)
Derivamos implícitamente $(x – 3)^2 + y^2 = 9/2$
2.(x – 3) + 2y.y ‘ = 0. Despejando y ‘, nos queda y ‘ = (3 – x)/y, con lo cual $y'_{(a,b)} = (3 – a)/b$ y la recta tangente pedida es:

$$y – b = ((3 – a)/b).(x – a).$$

La recta tangente pasa por el origen (0,0), por tanto 0 – b = ((3 – a)/b).(0 – a), y operando tenemos la ecuación $– a^2 – b^2 + 3a = 0$

El punto (a,b) verifica la ecuación de la circunferencia, por tanto $(a – 3)^2 + b^2 = 9/2$, y operando tenemos la ecuación $+ a^2 + b^2 – 6a + 9 = 9/2$

Resolvemos el sistema
$– a^2 – b^2 + 3a = 0$
$+ a^2 + b^2 – 6a + 9 = 9/2$
Sumando tenemos – 3a + 9 = 9/2 de donde a = 3/2.
Entrando con a = 3/2 en la ecuación $– a^2 – b^2 + 3a = 0$ tenemos $b^2 = 9/4$ de donde b = + 3/2 y b= - 3/2,

Los puntos (a,b) donde tocan las rectas tangentes a la circunferencia son (3/2, 3/2) y (3/2, -3/2) por tanto las rectas tangentes son:
y – (3/2) = ((3 – 3/2)/(3/2)).(x – 3/2). Operando nos queda y = x
y – (-3/2) = ((3 – 3/2)/(-3/2)).(x – 3/2). Operando nos queda y = - x

Opción B

Modelo1 Ejercicio 1 opción B sobrantes 1996

Una partícula si mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ para x > 1
En el punto P = (2, -4/3) la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.
(a) [1 punto]. Halla la ecuación de dicha recta tangente
(b) [0’5 puntos]. Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula encuentra al eje OX.
(c) [1 punto]. Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, encuentra el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

Solución

a)
$y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ para x > 1
Recta tangente en (2, -4/3) es y – (-4/3) = f ‘(2).(x – 2)
$f'(x) = [2(1 – x^2) – (2x)(-2x)] / [1 – x^2]^2 = (2x^2 + 2) / (1 – x^2)^2$, de donde f ‘(2) = 10/9
La recta tangente pedida es y +4/3 = (10/9)(x – 2)
b)
Si 1 < x < 2, $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ y el corte con el eje OX es f(x) = 0 que nos da x = 0 lo cual no nos sirve porque esta función nos la han dado solo para 1 < x < 2.

Veamos si para x ≥ 2 la función tangente y = (10/9)x – 20/9 – 4/3 = (10/9)x – 36/9 corta al eje OX. Hacemos y = 0, quedándonos x = 36/10 = 18/5 ≅ 3’6
c)
La asíntota vertical mas próxima al punto P es x = 1 porque $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{1 - x^2} = 2/0^- = -\infty$.

Como es una asíntota la función $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ definida en 1 < x < 2 no puede tocarla nunca.

Modelo1 Ejercicio 2 opción B sobrantes 1996

[2’5 puntos]. De una función integrable f : [-1,1] → R se sabe que para cada. x en dicho intervalo se tiene $| f(x) | \le 1 + x^2$
De los números -3, -2, -1, 2’5 y 2’75 ¿cuales pueden ser el valor *de* la integral $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$. Justifica la respuesta.

Solución

$f:[-1,1] \to R$ se sabe que para cada. x en dicho intervalo se tiene $|f(x)| \le 1 + x^2$
Sabemos que si $|x| \le a$ tenemos que $-a \le x \le a$, por tanto de $|f(x)| \le 1 + x^2$ tenemos también
$-1 - x^2 \le f(x) \le 1 + x^2$
También sabemos que $\left|\int f(x)dx\right| \le \int |f(x)|dx$. Por tanto

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx\right| \le \int_{-1}^{1}(1+x^2)dx = \left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = (1 + 1/3) - (-1 - 1/3) = 2 + 2/3 = 8/3 \cong 2'66$$

Por otro lado de $-1 - x^2 \le f(x)$ tenemos $f(x) \ge -1 - x^2$ e integrando nos resulta

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \ge \int_{-1}^{1}(-1-x^2)dx = \left[-x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = (-1-1/3) - (1 + 1/3) = -8/3 \cong -2'66$$

Hemos obtenido $-2'66.. \le \int_{-1}^{1} f(x)dx \le 2'66..$, con lo cual los números que pueden ser solución de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ son -2, -1 y 2'5.

Modelo1 Ejercicio 3 opción B sobrantes 1996

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 4,\\ x - 2y - 2z &= -1,\\ x - z &= 1. \end{aligned}$$

(a) [0'75 puntos] ¿Existe una solución del mismo en la que y = 0?
(b) [0'75 puntos]. Resuelve el sistema homogéneo asociado al sistema dado.
(c) [1 punto]. Haz una interpretación geométrica tanto del sistema dado como de sus soluciones

Solución

a)
Si y = 0 el sistema de ecuaciones nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 2x - z &= 4,\\ x - 2z &= -1,\\ x - z &= 1. \end{aligned}$$

Resolvemos las dos ultimas ecuaciones
$x - 2z = -1$,
$x - z = 1$. Operando 2ª +1ª(-1) nos da

$z = 2$, con lo cual $x = 3$
Veamos si esta soluciones verifican la ecuación $2x - z = 4$. $2(3) - 2 = 4$, lo cual es cierto por tanto el sistema original si admite una solución con y = 0, que es (x,y,z) = (3,0,2)
b)
El sistema homogéneo asociado al dado es

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 0,\\ x - 2y - 2z &= 0,\\ x - z &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si el determinante es distinto de cero la única solución es la trivial (x,y,z) = (0,0,0).

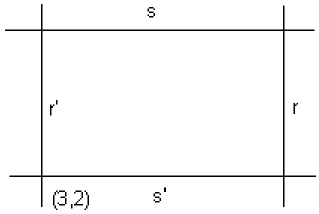
$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ 3^a C + 1^a C \right\} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \ne 0$, por tanto la única solución del sistema homogéneo es la trivial.
c)
Como rango(A) = 3 = rango(A^*), el sistema es compatible y determinado y tiene solución única que es la que calculamos en el apartado a) (x,y,z) = (3,0,2). Geométricamente nos dice que son tres planos independientes entre si que se cortan en el punto (3,0,2).

Modelo1 Ejercicio 4 opción B sobrantes 1996

[2,5 puntos] Se tiene un paralelogramo uno de cuyos vértices es el punto (3,2) y dos de cuyos lados se encuentran contenidos, respectivamente, en las rectas r y s de ecuaciones
$r \equiv 2x + 3y - 7 = 0$, $s \equiv x - 3y + 4 = 0$
Halla las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los otros dos lados.

Solución

$r \equiv 2x + 3y - 7 = 0$, $s \equiv x - 3y + 4 = 0$



El punto (3,2) no pertenece a ninguna de las rectas dadas “r” y “s” que no son paralelas porque sus vectores normales **n** = (2,3) de r y **v** = (1,-3) no son proporcionales, por tanto la posición de las rectas en el paralelogramo es la que aparece en la figura anterior.

La recta paralela a “s” que pasa por (3,2) es $x - 3y + K = 0$, $3 - 6 + K = 0$, de donde $K = 3$ y la recta pedida es “s” $\equiv x - 3y + 3 = 0$.

La recta paralela a “r” que pasa por (3,2) es $2x + 3y + K = 0$, $6 + 6 + K = 0$, de donde $K = -12$ y la recta pedida es “ r’ ” $\equiv 2x + 3y - 12 = 0$.